

6. 光子の相互作用

物質へ入射した荷電粒子は、物質を構成する原子の電子との衝突を多数繰り返しながらエネルギーを損失するが、X線や γ 線の光子が物質へ入射した場合は、光子には電荷がないので荷電粒子が入射した場合と全く異なる相互作用を行う。光子が物質へ入射したときの主な相互作用は

- 1) 光電効果
- 2) コンプトン散乱（トムソン散乱やレイレイ散乱も含む）
- 3) 電子対生成

である。その他に、非常に特殊な場合であるが、光核反応と呼ばれる(γ, n)反応がある。

X線や γ 線が物質へ入射したときに次の定性的な特徴がある。

- (1) 荷電粒子と比較して何倍も物質を透過する能力がある。
- (2) 光子ビームが物質を透過する際には、エネルギーが損失するのではなく、強度が減衰するのみである。

特徴(1)は、光子と物質との相互作用1)から3)までの断面積が、荷電粒子と原子（電子）との非弾性衝突断面積と比較して、はるかに小さいことに起因する。特徴(2)は、1)から3)のいずれかの相互作用により散乱されたり吸収された光子は、ビームから完全に取り除かれることを意味する。従って、物質をまっすぐに透過してきた光子は、物質と全く相互作用をしなかったことになるので、入射時のエネルギーをそのまま保持している。また、物質を透過してきたビーム中の光子数は相互作用した光子数だけ減少している。厚さ x の吸収体を透過した光子ビームの強度は以下の式で表される。

$$I(x) = I_0 \exp(-\mu x) \quad (6-1)$$

ここで、 I_0 は入射ビーム強度、 μ は吸収係数をそれぞれ示す。吸収係数は吸収体を構成する物質に依存し、相互作用1)から3)までの全相互作用と直接関係する物理量である。

6.1 光電効果

光電効果では、光子が原子に束縛された電子に吸収され、電子が放出される。放射される電子の運動エネルギーは

$$E = h\nu - B.E. \quad (6-2)$$

で与えられる。 $B.E.$ は電子の結合エネルギーであり、光子が金属等に入射したときに光電子が放出される場合は仕事関数と呼ばれる。自由電子と光子との間で光電効果が起こるとすると、運動量保存則が成立しない。従って、光電効果は原子に束縛した電子と光子の間でしか起こらない。放射された電子の反跳運動量は原子の原子核により吸収される。図6-1に銅に入射した光子のエネルギーの関数とした光電効果断面積を示す。入射光子のエネルギーが原子における電子の最大

結合エネルギー（K殻エネルギー）より大きいと、光電効果断面積は比較的小さい。しかし、入射光子のエネルギーが高エネルギー側からK殻エネルギーに近づくに従って光電効果断面積は増加する。入射光子のエネルギーがK殻エネルギーと一致したとき、もはやK殻電子は光電効果に寄与しなくなるので、光電効果断面積は急激に減少する。光電効果断面積のこの急激な降下をK吸収端と呼ぶ。入射光子のエネルギーがこのエネルギーより低くなると、光電効果断面積は再び増加する。そして、L殻やM殻に相当するエネルギーを通過する毎に、断面積は急激に降下する。これらは、L吸収端やM吸収端とそれぞれ呼ばれる。

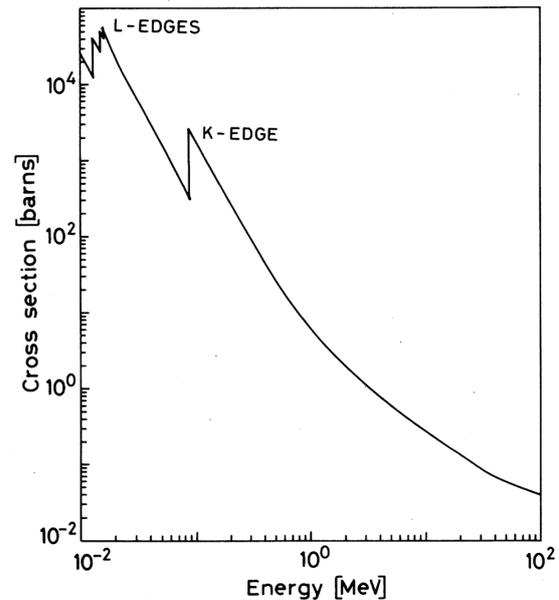


図6-1 銅に入射した光子のエネルギーの関数とした光電効果断面積。

光電効果を理論的に厳密に取り扱うためには、原子に束縛された電子に関するDirack方程式を取り合う必要があるので、かなり困難になる。入射光子のエネルギーがK殻エネルギーより高くなると、光電効果に寄与をするのはK殻電子のみになる。入射光子のエネルギーがK殻エネルギーより高く、非相対論的取扱いが可能な $h\nu \ll m_e c^2$ を仮定すると、Born近似を用いて光電効果断面積を以下の様に求めることができる。

$$\Phi_{photo} = 4\alpha^4 \sqrt{2} Z^5 \phi_0 (m_e c^2 / h\nu)^{7/2} \text{ cm}^2 \text{ per atom} \quad (6-3)$$

ここで、 $\phi_0 = 8\pi r_e^2 / 3 = 6.651 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$ 、 $\alpha = 1/137$ である。

光子エネルギーがK吸収端に近付いた場合は、

$$\Phi_{photo} = \phi_0 \frac{2^7 \pi (137)^3}{Z^2} \left(\frac{\nu_k}{\nu} \right)^4 \frac{\exp(-4\xi \cot^{-1} \xi)}{1 - \exp(-2\pi\xi)} \text{ cm}^2 \text{ per atom} \quad (6-4)$$

となる。ここで、 $h\nu_k = (Z - 0.03)^2 m_e c^2 \alpha^2 / 2$ および $\xi = \sqrt{\nu_k / (\nu - \nu_k)}$ である。 ν が ν_k に非常に近付いたとき、すなわち、 $\xi \gg 1$ のとき、(6-4)式は

$$\Phi_{photo} = \frac{6.3 \times 10^{-18}}{Z^2} \left(\frac{\nu_k}{\nu} \right)^{8/3} \quad (6-5)$$

と簡単な形になる。

L殻やM殻電子に関する光電効果断面積の計算は複雑になる。

光電効果断面積は入射光子エネルギー $h\nu$ と原子番号 Z に依存するが、 $h\nu$ がMeV領域の場合は Z の4乗から5乗に比例する。

6.2 コンプトン散乱

コンプトン散乱は、光子と自由電子との弾性散乱である。物質中において電子は原子に束縛されているが、入射光子のエネルギーは電子の結合エネルギーより十分に大きいので、結合エネルギーを無視して本質的には自由電子とみなしても問題ない。コンプトン散乱過程を図6-2に示す。エネルギー保存則

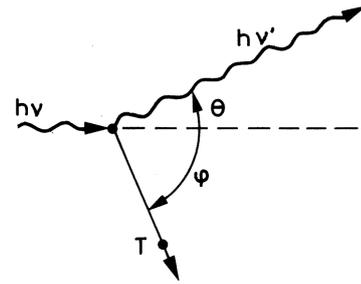


図6-2 コンプトン散乱過程。

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + T + m_e c^2 = h\nu' + \sqrt{p^2 c^2 + (m_e c^2)^2} \quad (6-6)$$

と、運動量保存則

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + p \cos \varphi \quad (6-7)$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \theta + p \sin \varphi \quad (6-8)$$

より、以下の関係が得られる。

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \gamma(1 - \cos \theta)} \quad (6-9)$$

$$T = h\nu - h\nu' = h\nu \frac{\gamma(1 - \cos \theta)}{1 + \gamma(1 - \cos \theta)} \quad (6-10)$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{2}{(1 + \gamma)^2 \tan^2 \varphi + 1} \quad (6-11)$$

$$\cot \varphi = (1 + \gamma) \tan \frac{\theta}{2}, \quad (6-12)$$

ここで、 $\gamma = h\nu/m_e c^2$ である。

量子電磁力学を用いて計算されたコンプトン散乱の断面積はKlein-Nishinaの式と呼ばれ、以下に与えられる。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \frac{1}{[1 + \gamma(1 - \cos \theta)]^2} \left(1 + \cos^2 \theta + \frac{\gamma^2 (1 - \cos \theta)^2}{1 + \gamma(1 - \cos \theta)} \right) \quad (6-13)$$

ここで、 r_e は古典的電子半径である。(6-13)式を $d\Omega$ に渡って積分すると、電子1個あたりのコンプトン散乱全断面積が

$$\sigma_c = 2\pi r_e^2 \left\{ \frac{1+\gamma}{\gamma^2} \left[\frac{2(1+\gamma)}{1+2\gamma} - \frac{1}{\gamma} \ln(1+2\gamma) \right] + \frac{1}{2\gamma} \ln(1+2\gamma) - \frac{1+3\gamma}{(1+2\gamma)^2} \right\} \quad (6-14)$$

となる。入射光子のエネルギーに対するコンプトン散乱全断面積を図6-3に示す。(6-13)式のKlein-Nishinaの式から、コンプトン散乱断面積 σ^s とコンプトン吸収断面積 σ^a が計算される。コンプトン散乱断面積 σ^s は、入射光子のエネルギーに対するコンプトン散乱光子が持つエネルギーの平均の割合である。したがって、

$$\frac{d\sigma^s}{d\Omega} = \frac{h\nu'}{h\nu} \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (6-15)$$

となる。 $d\Omega$ に渡って積分すると

$$\sigma^s = \pi r_e^2 \left[\frac{1}{\gamma^3} \ln(1+2\gamma) + \frac{2(1+\gamma)(2\gamma^2 - 2\gamma - 1)}{\gamma^2(1+2\gamma)^2} + \frac{8\gamma^2}{3(1+2\gamma)^3} \right] \quad (6-16)$$

を得る。

一方、コンプトン吸収断面積 σ^a は反跳電子に付与される平均エネルギーである。コンプトン散乱断面積とコンプトン吸収断面積の和はコンプトン散乱全断面積になる。つまり、

$$\sigma_c = \sigma^s + \sigma^a \quad (6-17)$$

なので、

$$\sigma^a = \sigma_c - \sigma^s \quad (6-18)$$

となる。コンプトン散乱断面積とコンプトン吸収断面積を図6-3に示す。

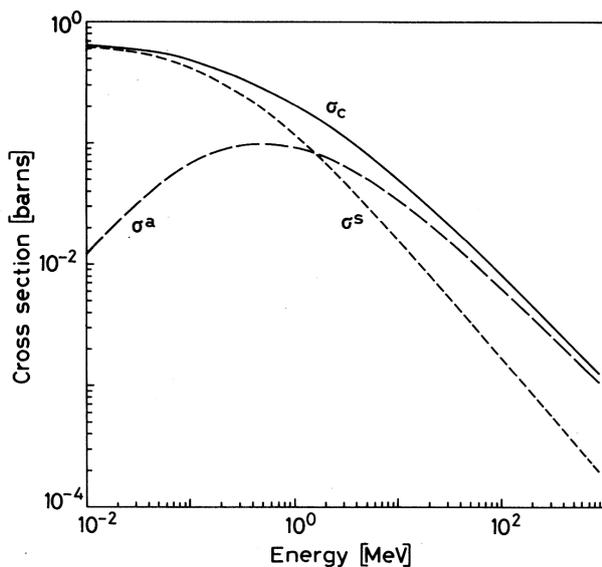


図6-3 コンプトン全散乱断面積、コンプトン散乱断面積及びコンプトン吸収断面積。

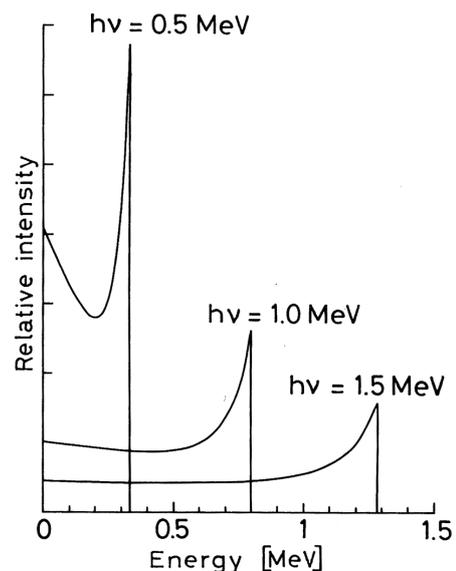


図6-4 コンプトン散乱における反跳電子のエネルギー分布。

光子検出器の議論で重要なのは、コンプトン散乱で反跳された電子のエネルギー分布である。

(6-13)式のKlein-Nishinaの式を用いて

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{\pi r_e^2}{m_e c^2 \gamma^2} \left[2 + \frac{s^2}{\gamma^2 (1-s)^2} + \frac{s}{1-s} \left(s - \frac{2}{\gamma} \right) \right] \quad (6-19)$$

となる。ここで、 $s = T/h\nu$ である。図6-4は異なる入射エネルギーの光子に対する反跳電子のエネルギー分布である。反跳電子の最大エネルギーは(6-10)式において $\theta = \pi$ とすれば

$$T_{max} = h\nu \left(\frac{2\gamma}{1+2\gamma} \right), \quad (6-20)$$

となり、このエネルギーをコンプトン端と呼ぶ。

6.3 トムソン散乱とレイレイ散乱

トムソン散乱は古典電磁力学で説明される自由電子から散乱される光子である。低エネルギー領域においてはKlein-Nishinaの式はトムソン散乱の式になり、断面積は

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \quad (6-21)$$

となる。

レイレイ散乱は光子が原子全体から散乱される現象である。このとき、原子に束縛された全ての電子の位相が揃っていると仮定されるので、コヒーレント散乱と呼ばれる。

トムソン散乱とレイレイ散乱では、入射光子のエネルギーは媒質へは付与されないので、媒質中の原子は電離も励起もされず、入射光子の軌道が偏向するのみである。通常、X線や γ 線に対してトムソン散乱とレイレイ散乱が発生する確率は非常に小さい。

6.4 電子対生成

電子対生成においては、入射光子のエネルギーが電子と陽電子対の生成に変換される。このとき、入射光子のエネルギーは電子と陽電子の静止エネルギーの和1.022MeVより大きくなくてはならない。また、運動量を保存するために、原子核の存在が必要となる。

理論的には、電子対生成は、簡単な交換則により物質中における電子の制動放射と関係付けられるので、電子対生成の断面積は制動放射の関係式から変換することができる。制動放射と同様に、原子核を取り囲む原子に束縛された多数の電子による遮蔽効果は電子対生成においても重要なパラメーターとなるので、電子対生成断面積も(3-3)式と同様なパラメーター

$$\xi = \frac{100 m_e c^2 h\nu}{E_+ E_- Z^{1/3}} \quad (6-22)$$

に依存する。ここで、 E_+ は放出される陽電子の全エネルギー、 E_- は放出される電子の全エネルギーである。

相対論が十分に適用できるエネルギー領域において任意の遮蔽効果があるとき、Born近似を用いると電子対生成の断面積は

$$d\tau = 4Z^2 r_e^2 \alpha \frac{dE_+}{(h\nu)^3} \left\{ (E_+^2 + E_-^2) \left[\frac{\phi_1(\xi)}{4} - \frac{1}{3} \ln Z - f(Z) \right] + \frac{2}{3} E_+ E_- \left[\frac{\phi_2(\xi)}{4} - \frac{1}{3} \ln Z - f(Z) \right] \right\} \quad (6-23)$$

となる。(3-4)式のと看と同様に $\phi_1(\xi)$ と $\phi_2(\xi)$ はそれぞれ ξ に依存する遮蔽関数である。パラメータの詳細については、3.2の制動放射で議論している。制動放射のと看と同様に遮蔽がない場合、つまり $\xi \gg 1$ のときの電子対生成断面積は

$$d\tau = 4Z^2 \alpha r_e^2 dE_+ \frac{E_+^2 + E_-^2 + 2E_+ E_- / 3}{(h\nu)^3} \left[\ln \frac{2E_+ E_-}{h\nu m_e c^2} - \frac{1}{2} - f(Z) \right] \quad (6-24)$$

一方、原子核の電界が完全に遮蔽される $\xi \approx 0$ の場合の電子対生成断面積は

$$d\tau = 4Z^2 \alpha r_e^2 \frac{dE_+}{(h\nu)^3} \left\{ \left(E_+^2 + E_-^2 + \frac{2E_+ E_-}{3} \right) \left[\ln \left(183 Z^{-1/3} \right) - f(Z) \right] - \frac{E_+ E_-}{9} \right\} \quad (6-25)$$

これらの式はBorn近似を用いているので、低エネルギー領域や Z が大きい場合（遮蔽効果が大きい場合）には精度が悪くなる。低エネルギー領域で遮蔽効果が大きい場合にも適用できるより厳密な式はBetheとHeitlerにより導出されているが、かなり複雑である。

$\xi \gg 1$ の遮蔽効果が全くない場合で、 $m_e c^2 \ll E_0 \ll 137 m_e c^2 Z^{-1/3}$ のエネルギー領域における電子対生成全断面積は、

$$\tau_{pair} = 4Z^2 \alpha r_e^2 \left[\frac{7}{9} \left(\ln \frac{2h\nu}{m_e c^2} - f(Z) \right) - \frac{109}{54} \right] \quad (6-26)$$

という式が求められている。一方、 $\xi = 0$ の完全に遮蔽される場合に、 $E_0 \gg 137 M_e c^2 Z^{-1/3}$ のエネルギー領域における電子対生成全断面積は

$$\tau_{pair} = 4Z^2 \alpha r_e^2 \left\{ \frac{7}{9} \left[\ln \left(183 Z^{-1/3} \right) - f(Z) \right] - \frac{1}{54} \right\} \quad (6-27)$$

となる。これ以外の場合について電子対生成全断面積を求めるには、通常、上述した式を数値計算により積分する。図6-5に電子対生成全断面積の入射光子のエネルギー依存性を示す。

制動放射の場合と同様に、電子対生成も原子に束縛された電子による場においても発生する。このときは断面積の式における係数 Z^2 を $Z(Z+1)$ とするとよい。

電子対生成全断面積の式(6-27)式を使うと、 γ 線の電子対生成に関する平均自由行程が

$$\frac{1}{\lambda_{pair}} = N\tau_{pair} \approx \frac{7}{9}4Z(Z+1)Nr_e^2\alpha \left[\ln\left(183Z^{-1/3}\right) - f(Z) \right] \quad (6-28)$$

と計算される。ここで、 N は原子密度である。この式は、(3-17)式を使うと放射長と関係付けることができ、

$$\lambda_{pair} \approx \frac{9}{7}L_{rad} \quad (6-29)$$

となる。

6.5 電子-光子シャワー

高エネルギー光子が物質に入射すると、電子陽電子対が生成され、生成された電子と陽電子が制動放射を発生する。この制動放射の光子のエネルギーが十分に高いとさらに対生成が起こる。このようにカスケード的に対生成と制動放射が繰り返し発生し、光子と電子及び陽電子がシャワーのように生成される現象を電子-光子シャワーと呼ぶ。電子-光子シャワーは対生成で発生する電子及び陽電子のエネルギーが、臨界エネルギーより低くなるまで継続する。電子及び陽電子のエネルギーが臨界エネルギーより低くなると、それぞれのエネルギーは原子との衝突により損失し、カスケードが終了する。

カスケード的な電子-光子シャワーの成長は統計過程である。放射長を単位とする物質におけるカスケードの侵入長の関数として生成される粒子の平均数、それぞれの粒子の平均エネルギーを計算するための簡単なモデルを作ることができる。まず十分に高いエネルギー E_0 を持つ光子からスタートする。この光子が物質中を1放射長侵入した時点で、平均的にそれぞれ $E_0/2$ のエネルギーを持つ一对の電子と陽電子が生成される。2放射長を通過した時点では、電子及び陽電子は、それぞれの粒子が持つエネルギーの半分のエネルギー $E_0/4$ を持つ光子を制動放射により放出する。3放射長を通過した時点では、電子及び陽電子により放射された2個の制動放射光子は、それぞれ電子対生成を行う。さらに、このとき、最初に生成さ

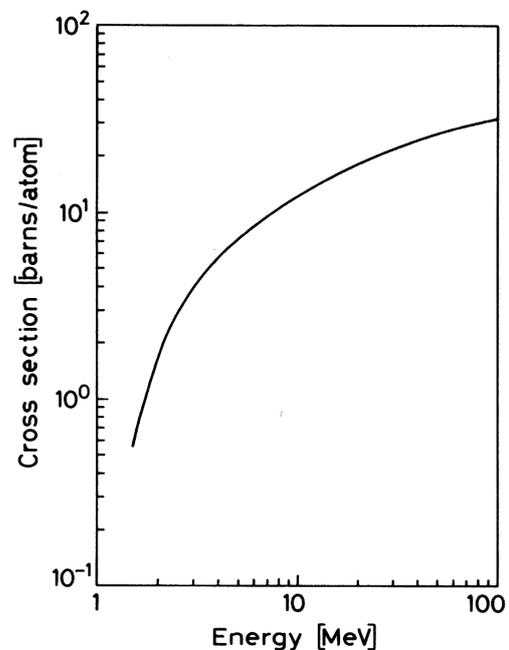


図6-5 電子対生成全断面積の入射光子のエネルギー-依存性。

れた電子及び陽電子は、それぞれ制動放射により光子を放出する。この時点で、生成された粒子の数は8個となり、それぞれの粒子はの $E_0/8$ エネルギーを持つ。このように考えると、 t 放射長侵入した際の粒子数の平均値は、近似的に

$$N \approx 2^t \quad (6-30)$$

となり、それぞれの粒子が持つ平均エネルギーは

$$E(t) \approx \frac{E_0}{2^t} \quad (6-31)$$

となる。電子からスタートしても同じ結果になる。

電子-光子シャワーの成長が、個々の粒子のエネルギーが臨界エネルギー E_c に到達した時点で終了すると仮定すると、最大侵入長 t_{max} は

$$E(t_{max}) = \frac{E_0}{2^{t_{max}}} = E_c \quad (6-32)$$

となる。したがって、

$$t_{max} = \frac{\ln(E_0/E_c)}{\ln 2} \quad (6-33)$$

となる。シャワーで生成される粒子の最大数は

$$N_{max} \approx \frac{E_0}{E_c} \quad (6-34)$$

となる。しかしながら、この簡単なモデルでは電子-光子シャワーを精度良く計算することは出来ない。

通常、モンテカルロ法を使用して電子-光子シャワーをコンピュータで精度良く計算する。鉄における30GeVの電子-光子シャワーについて計算された結果を図6-6に示す。図中の○と□は、それぞれ電子と光子の数を示す。また、ヒストグラムは電子-光子シャワーにより付与されるエネ

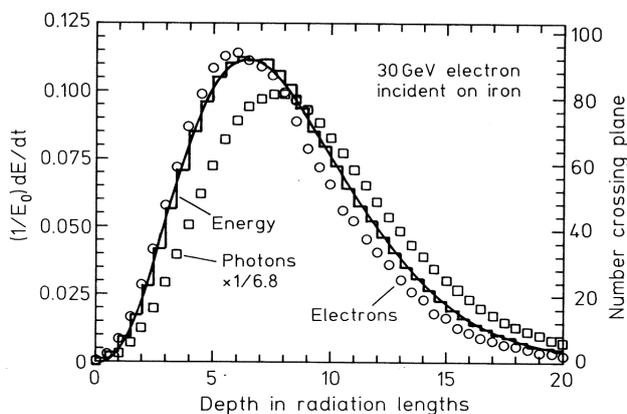


図6-6 鉄における30GeVの電子-光子シャワーのモンテカルロ計算結果。

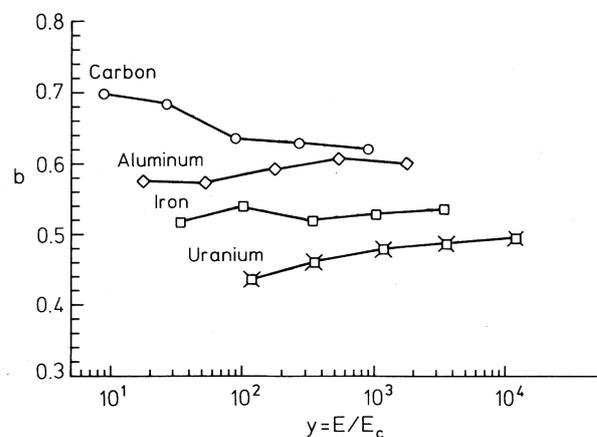


図6-7 種々の物質に関する(6-36)式の値。

ルギー $-dE/dt$ である。電子-光子シャワーにより生成される粒子数は侵入深さとともに指数関数的に増加し、最大値に到達した後、放射長の20倍程度の深さまで侵入しながら緩やかに減衰して行くことがわかる。但し、この計算はあくまでも統計事象を計算しているので結果は平均値であることに注意が必要である。計算値と測定値はかなりの差が出てくる。この様な計算から、数放射長を超えるとエネルギー付与 dE/dt はガンマ関数を使って

$$\frac{dE}{dt} = E_0 b \frac{(bt)^{a-1} \exp(-bt)}{\Gamma(a)} \quad (6-35)$$

と近似される。ここで、 a と b は物質に依存するパラメーターである。さらに最大エネルギー付与が起こる深さは

$$t_{max} = (a - 1)/b = 1.0 \times (\ln y + C_i) \quad (6-36)$$

で与えられる。ここで、 $y = E/E_c$ であり、臨界エネルギーを単位とした入射光子/電子のエネルギーである。また、 C_i の i は e と γ であり、電子に起因するカスケードでは $C_e = -0.5$ であり、光子に起因するカスケードでは $C_\gamma = +0.5$ である。(6-35)式を計算するためには、(6-36)式の第2式を使い t_{max} を計算し、 $b \approx 0.5$ とおくか図6-7を用いて b の値を読み取り(6-36)式の第1式から a の値を決める。

カスケードが侵入深さ方向に成長するのに伴って、横方向の広がりも増加する。生成される電子と陽電子の放出方向は縦方向に対してある角度で広がりを持つこと、電子や陽電子の多重クーロン散乱、制動放射により放出される光子は侵入軸からさらに離れたところまで到達すること等が横方向の広がりに寄与をする。電子-光子シャワーの横方向の広がり、

$$R_M = L_{rad} \frac{E_s}{E_c} \quad (6-37)$$

で定義されるMoliere半径が尺度とされる。ここで、 $E_s = m_e c^2 \sqrt{4\pi/\alpha} = 21.2 \text{ MeV}$ である。放射長の場合と同様に、Moliere半径を単位とすると電子-光子シャワーの横方向の広がり物質にあまり依存しなくなる。図6-8に鉛における1GeVの電子-光子シャワーの様々な侵入長(放射長単位)における横方向のエネルギー損失分布を示す。侵入長が1放射長程度までは電子-光子シャワーの横方向の広がり狭いことがわかる。この高密度の粒子の芯の周囲を取り囲むように低密

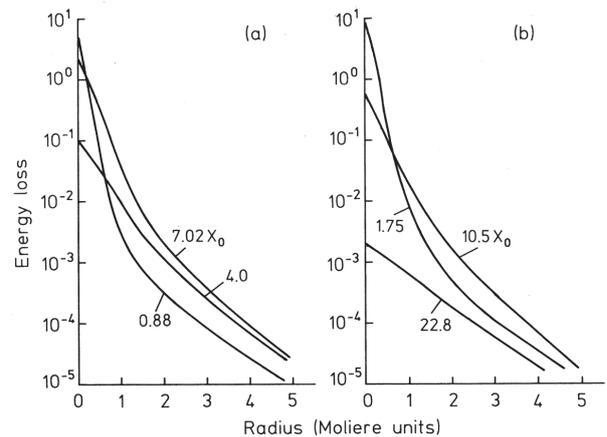


図6-8 鉛における1GeV電子-光子シャワーの横方向のエネルギー損失分布。

度の粒子が比較的長距離まで分布している。シャワーが成長するのに伴い、中心の芯は分散し、最大半径に達した後に消失する。シャワーの90%以上は $2R_M$ 以内に含まれていることがわかる。

素粒子実験に使用される電磁カロリメータの設計及び建設において、電子-光子シャワーの縦方向と横方向の分布を調べることは非常に重要である。電磁カロリメータは電子-光子シャワーの全エネルギーを吸収することにより入射した高エネルギー粒子のエネルギーを測定する。鉄を用いて35GeVの電子-光子シャワーを吸収するためには、20放射長以上の厚さを必要とする。このとき、実際の鉄の厚さは35cm以上になる。

6.6 全吸収係数と光子の減衰

物質に入射した光子の原子1個あたりの全相互作用の確率は、全吸収断面積と呼ばれ、

$$\sigma = \Phi_{photo} + Z\sigma_c + \tau_{pair} \quad (6-38)$$

となる。原子1個あたりに Z 個の電子があるので、コンプトン散乱断面積に原子番号 Z を掛けている。図6-9に鉛における光子の全吸収断面積を示す。吸収断面積 σ に原子密度 N を掛けると

$$\mu = N\sigma = \sigma(N_a\rho/A) \quad (6-39)$$

となり、相互作用による単位長さ当たりの光子の吸収確率になり、全吸収係数と呼ばれる。全吸収係数の逆数は物質中の光子の平均自由行程である。強度 I_0 の単一エネルギーの光子が物質に入射したとき、距離 x 進んだ後の光子数は(0-12)式より

$$I/I_0 = \exp(-\mu x) \quad (6-40)$$

となる。混合物や化合物の場合は、Bragg則を適用して

$$\frac{\mu}{\rho} = w_1 \frac{\mu_1}{\rho_1} + w_2 \frac{\mu_2}{\rho_2} + \dots \quad (6-41)$$

となる。

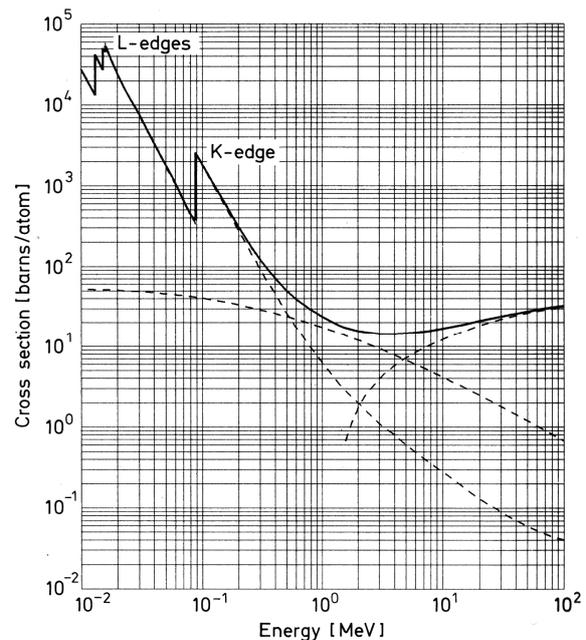


図6-9 鉛における光子の全吸収断面積。