

## 5. エネルギー損失分布：ストラグリング

前章まではおもに、荷電粒子の物質中の平均エネルギー損失を中心に議論してきた。一般的に物質に入射した荷電粒子は、多数の衝突過程でエネルギーを付与するが、個々の衝突過程は確率現象でありエネルギー損失の値は統計的揺らぎを持つので、測定されるエネルギー損失の値が平均値と一致することはない。従って、均一エネルギーの荷電粒子ビームを与えられた厚さの物質に入射しても、この物質を通過したときのビームエネルギーは入射エネルギーからBethe-Blochの式で計算される平均エネルギー損失だけ低い値のみを示すのではなく、ある構造を持った分布を示す。このエネルギー損失の統計的揺らぎに加え、個々の衝突における偏向の累積による物質中の通過経路の揺らぎも加わる。

## 5.1 厚い吸収体の場合：ガウス関数近似

ランダム事象の変数が $N$ 個あり、それらは全て同じ確率分布関数に従うとき、変数の個数が $N \rightarrow \infty$ の限界ではランダム事象の変数の和はガウス分布に近づく。この原理によれば、物質の厚さが厚い吸収体では衝突回数が十分に多いので、荷電粒子の物質中におけるエネルギー損失の分布はガウス関数で近似することができる。荷電粒子の物質中における1回の衝突で損失するエネルギー $\delta E$ をランダム事象の変数とする。このとき、1回のエネルギー損失において荷電粒子の速度変化は無視できる、すなわち、速度に依存する衝突断面積は定数だと仮定すると、全エネルギー損失は、それぞれが等しい分布を持った多数の独立した $\delta E$ の和となる。衝突回数 $N$ が十分に大きいときは、 $\delta E$ の和は以下のガウス関数に近づく。

$$f(x, \Delta) \propto \exp\left(-\frac{(\Delta - \bar{\Delta})^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5-1)$$

ここで、 $x$ は吸収体の厚さ、 $\Delta$ は吸収体におけるエネルギー損失、 $\bar{\Delta}$ はエネルギー損失の平均値および $\sigma$ は標準偏差を示す。

非相対論的な重い荷電粒子の場合、ガウス分布の広がり（標準偏差） $\sigma_0$ はBohrにより

$$\sigma_0^2 = 4\pi N_a r_e^2 (m_e c^2)^2 \rho \frac{Z}{A} x = 0,1569 \rho \frac{Z}{A} x \quad \text{MeV}^2 \quad (5-2)$$

と計算された。ここで、 $N_a$ はアボガドロ数、 $r_e$ は古典的電子半径、 $m_e$ は電子の質量、 $\rho$ は吸収体の密度、 $Z$ は吸収体の原子番号および $A$ は吸収体の質量数である。この式を相対論的重い荷電粒子について拡張すると、

$$\sigma^2 = \frac{(1 - \frac{1}{2}\beta^2)}{1 - \beta^2} \sigma_0^2 \quad (5-3)$$

となる。

吸収体がさらに厚くなると、入射粒子のエネルギー損失が大きくなり、速度に依存する衝突断面積は定数とする仮定が成り立たなくなる。

## 5.2 薄い吸収体の場合：LandauとVavilovの理論

物質の厚さが薄い吸収体やガスに入射した場合は、荷電粒子の衝突回数 $N$ がかなり少なくなるので、ガウス関数近似が適用できなくなる。この場合は、衝突1回あたりのエネルギー損失が大きい確率を含むので取扱いが困難になる。重い荷電粒子の最大エネルギー付与 $W_{max}$ は(1-16)式で与えられ、電子の最大エネルギー付与は入射時の運動エネルギーの1/2である。電子の場合はさらに、1回の制動放射のみによるエネルギー損失の確率も加わる。これらエ

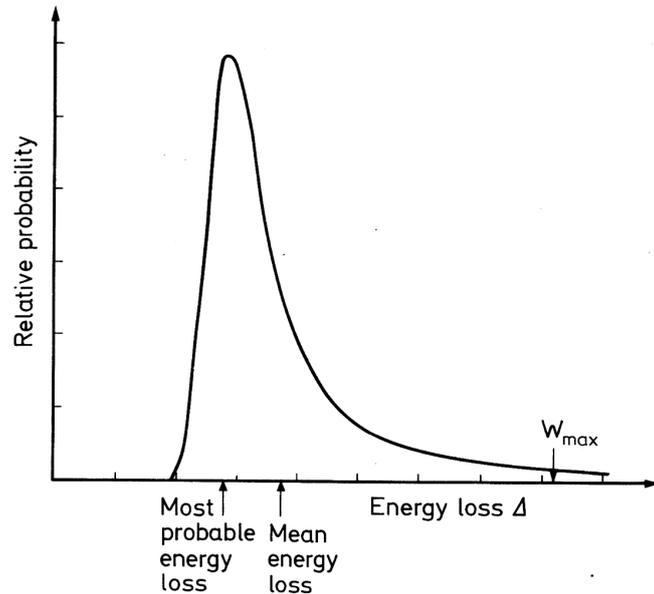


図5-1 薄い吸収体に入射した荷電粒子の典型的なエネルギー損失分布。

ネルギー損失が大きい事象の確率は小さいが、図5-1に示すようなエネルギー損失分布の高エネルギー側に裾を引く非対称の歪んだ曲線となる。この場合、高エネルギー側の裾のために、エネルギー損失の平均値は曲線のピークではなくピークから高エネルギー側へ移動している。曲線のピークは最も頻度の高いエネルギー損失量（最大確率エネルギー損失）となる。平均エネルギー損失と最大確率エネルギー損失はエネルギー損失分布の重要なパラメーターになる。

この分布に関する基本的な理論計算がLandau、SymonおよびVavilovにより、それぞれ異なる適用領域についてなされた。これらの理論では平均エネルギー損失 $\bar{\Delta}$ と一回の衝突で付与可能な最大エネルギー $W_{max}$ の比

$$\kappa = \frac{\bar{\Delta}}{W_{max}} \quad (5-4)$$

をパラメーターとしている。平均エネルギー損失 $\bar{\Delta}$ は、通常の目的では、Bethe-Blochの式(1-15)式の最初の係数のみを使い、対数関数は無視しても十分良い近似となるので、

$$\bar{\Delta} \approx \xi = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \left(\frac{z}{\beta}\right)^2 x \quad (5-5)$$

としてよい。文献では平均エネルギー損失 $\bar{\Delta}$ は $\xi$ とされている。通常、 $\kappa < 10$ のときは薄い吸収体として取り扱うが、 $\kappa > 1$ では分布は既にガウス近似に近付き $\kappa > 10$ になるとガウス分布で十分良い近似となる。

### 5.3 Landauの理論

Landauは非常に薄い吸収体で $\kappa \leq 0.01$ のときに関して次の様な項目を仮定し、エネルギー損失分布の計算を行った。

- 1) 最大エネルギー損失は無限大を取りうる。つまり、 $W_{max} \rightarrow \infty$ このとき $\kappa \rightarrow 0$ である。
- 2) 個々のエネルギー付与は十分に大きく、原子の軌道電子は自由電子として取り扱うことができる。軌道電子の束縛条件が必要な衝突は無視する。
- 3) エネルギー付与により粒子の速度は減速しない。つまり、粒子の速度は変化しない。

Landau理論によるエネルギー損失分布は

$$f(x, \Delta) = \phi(\lambda) / \xi \quad (5-6)$$

で与えられる。ここで、

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-u \ln u - u\lambda) \sin \pi u du \quad (5-7)$$

$$\lambda = \frac{1}{\xi} [\Delta - \xi (\ln \xi - \ln \varepsilon + 1 - C)] \quad (5-8)$$

$$\ln \varepsilon = \ln \frac{(1 - \beta^2) I^2}{2mc^2 \beta^2} + \beta^2 \quad (5-9)$$

であり、 $C$ はオイラーの定数で $C = 0.577 \dots$ である。(5-9)式で与えられるパラメータ $\varepsilon$ は、仮定2)において許されるエネルギー付与の最小値を示す。 $\phi(\lambda)$ はパラメータ $\lambda$ のみに依存する関数で数値計算により値を求める。 $\phi(\lambda)$ の数値計算から最大確率エネルギー損失として

$$\Delta_{mp} = \xi [\ln(\xi/\varepsilon) + 0.198 - \delta] \quad (5-10)$$

という式が得られている。この式には密度補正 $\delta$ が考慮されている。

### 5.4 Symonの理論とVavilovの理論

Landauによる $\kappa$ の値が非常に小さい領域とガウス関数近似が有効な領域との中間領域のエネルギー損失分布がSymonとVavilovにより計算された。SymonはLandauの理論をもとにさらに巧妙な近似を加えてエネルギー損失を計算した。しかしながら、彼の計算結果はグラフの形式でまとめられているのでコンピューターを使った数値計算には不便である。

Vavilovの理論はLandau理論をもとに仮定2)と3)はそのまま用いて、許される最大エネルギー付与を正確に計算する式を導出し、 $\phi(\lambda)$ の計算を一般化した。Vavilovが導出した結果はより複雑な式になったが、 $\kappa \rightarrow 0$ のときはLandau分布に、 $\kappa \rightarrow \infty$ のときはガウス分布にそれぞれ収束する。図5-2に $\kappa$ をパラメーターとしたVavilov理論の分布とを示す。図中の曲線Lは $\kappa = 0$ のLandau分布である。また、図より $\kappa = 1$ のときはガウス関数にかなり近いことがわかる。 $\kappa \rightarrow \infty$ のときのVavilov分布の分散は

$$\sigma^2 = \frac{\xi^2}{\kappa} \frac{1 - \beta^2}{2} \quad (5-11)$$

となり、重い荷電粒子に関するBohrの理論(5-3)式と一致する。図5-3にVavilovの理論およびSymonの理論と実験値の比較を示す。

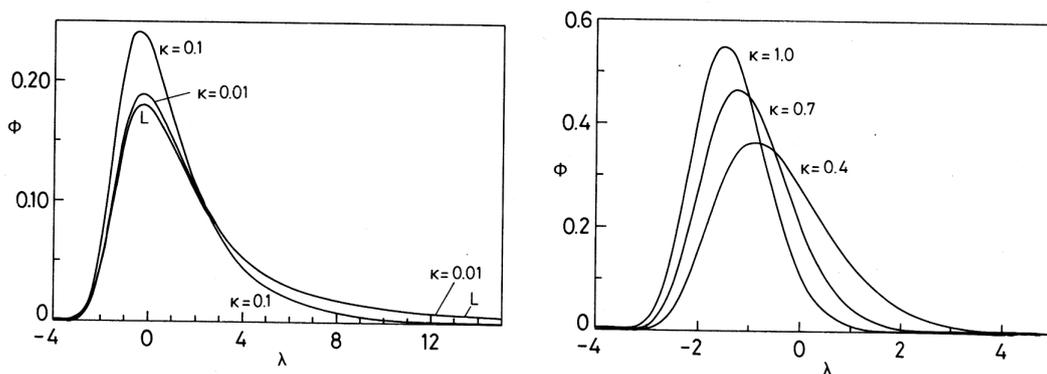


図5-2  $\kappa$ をパラメーターとして計算したVavilov分布。曲線LはLandau分布を示す。

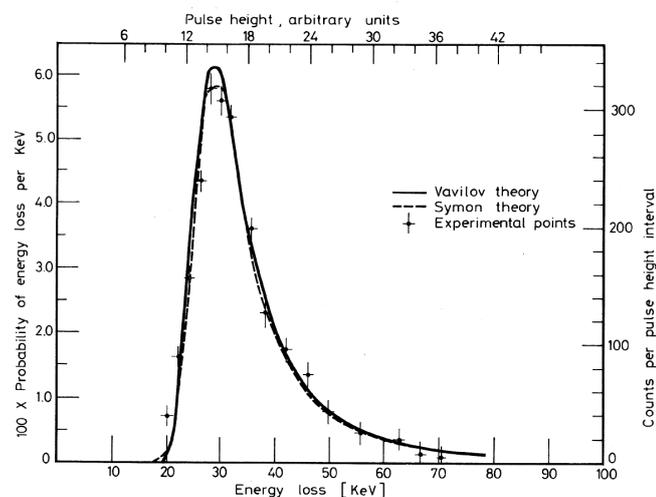


図5-3 Vavilov分布およびSymon分布と実験値の比較。