

4. 多重クーロン散乱

物質中を通過する荷電粒子は、物質を構成する原子の軌道電子との非弾性散乱に加え、物質を構成する原子の原子核による弾性的なクーロン散乱を繰り返すことがある。しかしながらこのような多重クーロン散乱が発生する確率は大きくない。スピンの効果と軌道電子による電界の遮蔽を無視すると、入射荷電粒子と原子核の個々の衝突はRutherfordの散乱公式で表すことができる。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = z_2^2 z_1^2 r_e^2 \frac{(m_e c / \beta p)^2}{4 \sin^4(\theta/2)} \quad (4-1)$$

Rutherfordの散乱公式は散乱角 θ に対して $1/\sin^4(\theta/2)$ の依存性があるので、1回の衝突あたりの偏向は小さい。ここで、原子核の質量は入射荷電粒子の質量より十分に大きく、衝突あたりに原子核に付与されるエネルギーは無視できる程小さいと仮定する。荷電粒子が物質中を通過するときに多重クーロン散乱を起こすとジグザグ軌道を取り、個々の小角散乱が累積した結果として、図4-1に示すように入射軌道から偏向する。

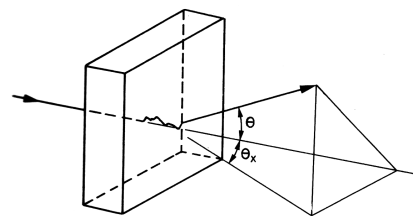


図4-1 荷電粒子の多重クーロン散乱

通常、物質中における荷電粒子のクーロン散乱は次の3つに分けられる。

- 1) 1回散乱：荷電粒子が入射する物質の厚さが非常に薄く、2回以上のクーロン散乱が発生する確率が小さい場合は、物質を通過する際の荷電粒子の角度分布は(4-1)式で与えられる。
- 2) 複数散乱：散乱の平均数が $N < 20$ の場合を複数散乱(Plural scattering)と呼ぶ。この場合は(4-1)式のRutherford散乱公式や統計的手法が適用できず、解析が困難である。
- 3) 多重散乱：散乱の平均数が $N > 20$ で、個々の散乱におけるエネルギー損失が無視できる程小さい場合、統計的手法を用いて、荷電粒子が通過した物質の厚さの関数とした正味の偏光角の確率分布関数を求めることができる。通常の実験で取り扱うことが多い。

一般的には、多重クーロン散乱を厳密に計算することが難しいので、いくつかの複雑なレベルに応じた公式がある。最も良く用いられるのはMoliereによる小角近似であり、 $\beta < 0.05$ の低エネルギー電子の場合と非常に重い物質に入射した電子の場合を除き、角度が $\theta \approx 30^\circ$ までの多重散乱であれば、ほとんど全ての粒子に適用できる。Moliereの式は入射方向に対する偏向角 θ の分布を次の級数として表している。

$$P(\theta) d\Omega = \eta d\eta \left\{ 2 \exp(-\eta^2) + \frac{F_1(\eta)}{B} + \frac{F_2(\eta)}{B^2} + \dots \right\} \quad (4-2)$$

ここで、 $\eta = \theta / (\theta_1 \sqrt{B})$ 及び $\theta_1 = 0.3965 (zQ/p\beta) \sqrt{(\rho\delta x/A)}$ である。パラメーター B は以下の方程式で決まる。

$$g(B) = \ln B - B + \ln \gamma - 0.154 = 0 \quad (4-3)$$

ここで、 $\gamma = 8.831 \times 10^3 qz^2 \rho \delta x / \beta^2 A \Delta$ および $\Delta = 1.13 + 3.76 (Zz/137\beta)^2 dy$ である。 γ が与えられれば B の値は(4-3)式 $g(B) = 0$ をNewton法等を用いて数値的に解き根を求めれば良い。関数 $F_k(\eta)$ はベッセル関数 J_0 を用いた以下の積分で定義されている。

$$F_k(\eta) = \frac{1}{k!} \int J_0(\eta y) \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right) \left[\frac{y^2}{4} \ln\left(\frac{y^2}{4}\right)\right]^k y dy \quad (4-4)$$

η に対する F_1 と F_2 の値を表4-1に示す。その他の変数は以下の通りである。

Z : 物質の原子番号、 A : 物質の質量数、 δx : 散乱体の厚さ[cm]、 ρ : 散乱体の密度[g/cm³]、
 p : 入射粒子の運動量[MeV/c]、 z : 素電荷 e を単位とした入射粒子の電荷、
 $\beta = v/c$ (入射粒子の速度) 、

$$Q = \begin{cases} \sqrt{Z(Z+1)} & \text{for electron and positrons} \\ Z & \text{for other particles} \end{cases}$$

$$q = \begin{cases} (Z+1)Z^{1/3} & \text{for electron and positrons} \\ Z^{4/3} & \text{for other particles} \end{cases}$$

通常、(4-2)式の計算では F_2 の項までで十分である。

図4-2には運動エネルギーが15MeVの電子が薄い金箔を通過する際の散乱の角度分布を示す。散乱角が小さい領域では、単位立体角当たりの散乱確率(微分断面積)は、ガウス関数に近い分布を示す。しかしながら、散乱角が増加すると、補正項の寄与が大きくなり広い裾を引く分布になる。通常、大角散乱は物質中における小角クーロン散乱が累積した結果よりも一回の大角クーロン散乱によることが多い。このことは、Rutherford公式の $1/\sin^4(\theta/2)$ の項がガウス関数より長い裾を引くことで説明できる。

4.1 多重散乱のガウス関数近似

与えられた物質中の多重散乱効果は、確率が小さい大角散乱を無視して、散乱角が $\theta < 10^\circ$ の小角散乱のみを考慮しても良い近似となる。そこで、 $d\Omega \approx 2\pi\theta d\theta$ の小角近似を用いて確率分布を以下のようなガウス関数型で近似する。

$$d\Omega(\theta) = \frac{2\theta}{\langle\theta^2\rangle} \exp\left(-\frac{\theta^2}{\langle\theta^2\rangle}\right) d\theta \tag{4-5}$$

ここで、 $\langle\theta^2\rangle$ は散乱角の自乗平均値で

$$\langle\theta^2\rangle = \int_0^\infty \theta^2 P(\theta) d\Omega \tag{4-6}$$

で表される。 $\sqrt{\langle\theta^2\rangle}$ を全多重散乱の角度分布の自乗平均値の平方根と等しくする。(4-5)式を(4-2)式の第1項と比較すると、 $\sqrt{\langle\theta^2\rangle} \approx \theta_1\sqrt{B}$ と近似して良いことがわかる。ただし、(4-2)式は長い裾を持つので、(4-5)式の計算に全ての項を用いると無限大に発散する。

$\langle\theta^2\rangle$ を比較的良い近似で計算するのに便利な経験式を以下に示す。

表4-1 $F_1(\eta)$ と $F_2(\eta)$ の値

η	$F_1(\eta)$	$F_2(\eta)$	η	$F_1(\eta)$	$F_2(\eta)$
0.0	0.8456	2.49	2.2	0.106	0.02
0.2	0.700	2.07	2.4	0.101	-0.046
0.4	0.343	1.05	2.6	0.082	-0.064
0.6	-0.073	-0.003	2.8	0.062	-0.055
0.8	-0.396	-0.606	3.0	0.045	-0.036
1.0	-0.528	-0.636	3.2	0.033	-0.019
1.2	-0.477	-0.305	3.5	0.0206	0.0052
1.4	-0.318	0.052	4.0	0.0105	0.0011
1.6	-0.147	0.243	5.0	0.00382	0.000836
1.8	0.000	0.238	6.0	0.00174	0.000345
2.0	0.080	0.131	7.0	0.00091	0.000157

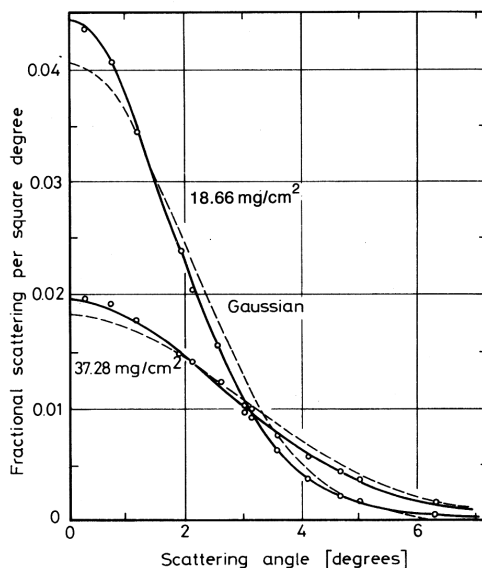


図4-2 運動エネルギーが15.7 MeVの電子が薄い金箔を通過する際の散乱角分布。

$$\langle \theta^2 \rangle = 2 \frac{\chi_c^2}{1+F^2} \left[\frac{1+v}{v} \ln(1+v) - 1 \right] \text{ rad}^2 \quad (4-7)$$

ここで、各パラメーターは以下の通りである。

$$v = \frac{0.5\Omega}{(1-F)}, \quad \Omega = \frac{\chi_c^2}{\chi_a^2}, \quad \chi_c^2 = 0.157z \left[\frac{Z(Z+1)}{A} \right] \frac{x}{p^2\beta^2}, \quad \chi_a^2 = 2.007 \times 10^{-5} Z^{2/3} \frac{1+3.34(Zz\alpha/\beta)^2}{p^2}.$$

また、 p は運動量でMeV/cの単位、 x は経路長でg/cm²の単位、 z は荷電粒子の電荷、 Z と A はそれぞれ物質の原子番号と質量数、 α は微細構造定数である。 F は(4-2)式の分布を再現するための重みであり、 $\langle \theta^2 \rangle$ が有限の値を取るために1より小さい必要がある。また、 Ω は散乱の平均回数と解釈される。0.9 < F < 0.995かつ10 < Ω < 10⁸の範囲であれば、(4-7)式の近似は2%より良い精度となる。

図4-2に示されている2本のガウス曲線の標準偏差を(4-5)式を使って計算し、金箔に入射した15.7 MeVの電子の $\langle \theta^2 \rangle$ を求めると、次のようになる。

$$\langle \theta^2 \rangle = \begin{cases} 0.0023\text{rad}^2 & x = 18.66\text{mg/cm}^2 \\ 0.0051\text{rad}^2 & x = 37.28\text{mg/cm}^2 \end{cases} \quad (4-8)$$

実際のガウス関数

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right], \quad \mu = \int xP(x) dx, \quad \sigma^2 = \int (x-\mu)^2 P(x) dx,$$

を使うと、 $\sigma = \sqrt{\langle \theta^2 \rangle / 2}$ となり $x = 18.66 \text{ mg/cm}^2$ 及び $x = 37.28 \text{ mg/cm}^2$ それぞれの場合について $\sigma = 1.94^\circ$ と $\sigma = 2.89^\circ$ を得る。これらの値を(4-8)式と比較すると $\sigma = 1.944^\circ$ 、 $\sigma = 2.895^\circ$ となりほぼ良く一致する。

解析に便利な物理量として、荷電粒子の入射軌道を含む平面への偏光角の射影（図4-1の θ_x ）がある。 θ_x の分布も次のようなガウス関数で良い近似となる。

$$P(\theta_x) d\theta_x = (2\pi \langle \theta_x^2 \rangle)^{-1/2} \exp \left(-\frac{\theta_x^2}{2 \langle \theta_x^2 \rangle} \right) d\theta_x \quad (4-9)$$

ここで、射影散乱角の自乗平均値 $\langle \theta_x^2 \rangle$ は実際の散乱角の自乗平均値 $\langle \theta^2 \rangle$ と $\langle \theta_x^2 \rangle = \langle \theta^2 \rangle / 2$ の関係がある。

図4-1に示されるように入射荷電粒子は多重散乱の後、入射軌道軸から横方向へずれている。通常、このずれの距離は非常に小さいが、横方向のずれの分布は次の式で計算できる。

$$P(r) dr = \frac{6r}{\langle \theta^2 \rangle t^2} \exp \left(-\frac{3r^2}{\langle \theta^2 \rangle t^2} \right) dr \quad (4-10)$$

ここで、 r はずれの距離、 $t = x/L_{rad}$ は放射長を単位とした厚さである。ずれの距離の自乗平均値は

$$\langle r^2 \rangle = \langle \theta^2 \rangle t^2 / 3 \quad (4-11)$$

である。放射長 $t = x/L_{rad}$ を使ったのは物理的な意味はなく標識を簡単にするためである。

4.2 低エネルギー電子の後方散乱

質量が小さい電子は、原子核による散乱で大角度に偏向しやすい。この大角散乱の確率が大きいので、図4-3に示すように、電子が物質中で多重散乱の間に軌道が逆方向を向き、物質から後

方へ散乱することがある。この効果は低エネルギー電子に対して大きく、また、物質の原子番号 Z とともに増加する。さらに、後方散乱は物質への入射角にも依存する。物質表面に対して垂直方向に入射した電子と比較して、表面に対し斜方向から入射した電子の方が後方散乱する確率が高い。

入射した電子数に対して後方散乱した電子数の比を後方散乱係数またはアルベドと呼ぶ。様々な物質について入射電子のエネルギーをパラメーターとして測定された後方散乱係数を図4-4に示す。電子の検出器を使った実験では、幾何学的形状とエネルギーに依存して検出すべき電子の内かなりの数が、検出信号を生成する前に後方散乱により検出体系から出て行く可能性があるため、電子検出器における後方散乱は重要な検討項目である。

例えば、NaI等の高い原子番号の物質にコリメートされていない電子が入射した場合は入射電子の80%が後方散乱により体系から出て行く。

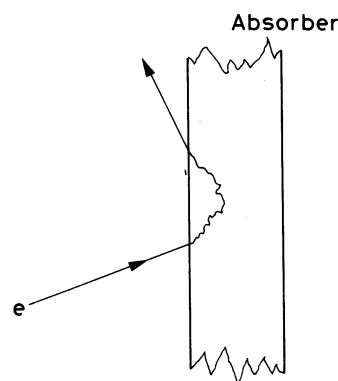


図4-3 電子の多重大角クーロン散乱による後方散乱。

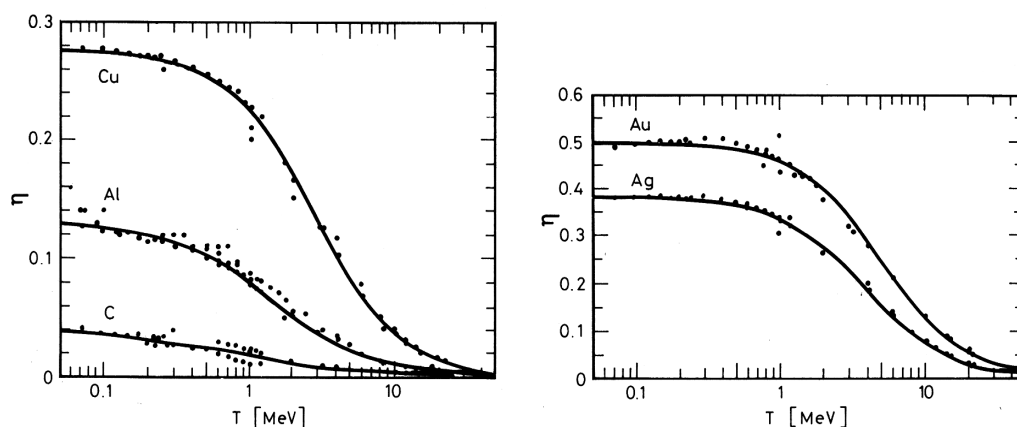


図4-4 様々な物質に対する入射電子の運動エネルギーをパラメーターとした後方散乱係数の測定値。電子は試料表面に対して垂直に入射した。