3. 電子及び陽電子のエネルギー損失

重い荷電粒子と同様に、電子や陽電子が物質中を通過するときには衝突（散乱）によりエネルギーを損失する。しかしながら、重い荷電粒子の場合に議論したエネルギー損失に加え、電子と陽電子の質量は小さいので原子核が作る電界中で散乱されるときに、電磁波を放射する「制動放射」が発生する。古典的には、制動放射は原子核の電荷が作る中心引力により、電子または陽電子が直線軌道から偏向されるときの加速度で放射される電磁波として理解されている。数MeVのエネルギー領域までは制動放射の寄与はそれほど大きくない。エネルギーが数MeVより増加すると制動放射が発生する確率が急激に増加し、数10MeVのエネルギー領域になると、制動放射によるエネルギー損失は、衝突や電離によるエネルギー損失と同等かそれより大きくなる。この臨界エネルギーを超えると制動放射によるエネルギー損失が支配的になる。

電子や陽電子による全エネルギー損失は以下のような２つの部分にわけることができる。

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{tot} = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} + \left(\frac{dE}{dx}\right)_{coll} \tag{3-1}$$

3.1 衝突によるエネルギー損失

重い荷電粒子の衝突によるエネルギー損失を表すBethe-Blochの式を導出する際の基本的な物理的機構は、電子及び陽電子の場合も有効である。しかしながら、電子及び陽電子の質量が小さいために以下の点を考慮する必要がある。

1． 入射粒子の軌道は、衝突により偏向する。
2． 個々の衝突は、同じ種類の粒子間（電子−電子）の衝突になるので、入射時の運動エネルギーがT_eのときに１回の衝突で可能な最大エネルギー付与は$T_e/2$となる。

電子または陽電子に関してBethe-Blochの式を修正すると次のようになる。

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A}\frac{1}{\beta^2}\left[\ln\frac{\tau^2(\tau+2)}{2\left(I/m_e c^2\right)^2} + F(\tau) - \delta - 2\frac{C}{Z}\right] \tag{3-2}$$

ここで、τは電子の静止エネルギー$m_e c^2$を単位とした電子または陽電子の運動エネルギー、

電子の場合 $$F(\tau) = 1 - \beta^2 + \frac{\frac{\tau^2}{8} - (2\tau+1)\ln 2}{(\tau+1)^2}$$

陽電子の場合 $$F(\tau) = 2\ln 2 - \frac{\beta^2}{12}\left\{23 + \frac{14}{\tau+2} + \frac{10}{(\tau+2)^2} + \frac{4}{(\tau+2)^3}\right\}$$

である。δとCは重い荷電粒子の場合と同様にそれぞれ密度補正と殻補正である。

3.2 放射によるエネルギー損失：制動放射

数100GeVより低いエネルギー領域では、放射により物質中でのエネルギーの大部分が損失する粒子は電子と陽電子のみであり、この放射確率は$\sigma \propto r_e^2 = \left(e^2/mc^2\right)^2$である。また、$\mu$粒子の静止エネルギーは106MeVなので、放射確率は電子の場合の約40000分の1である。

制動放射の放出は、運動する電子が経験する電界強度に強く依存するので、原子核が作る電界に対する物質の軌道電子による遮蔽の効果は大きい。したがって、制動放射の断面積は入射電子の運動エネルギーばかりではなく、衝突パラメーター及び物質の原子番号にも依存する。遮蔽効果は以下の量でパラメーター化される。

$$\xi = \frac{100 m_e c^2 h\nu}{E_0 E Z^{1/3}} \tag{3-3}$$

ここで、E_0 は放射前に電子または陽電子が有する全エネルギー、E は放射後に電子または陽電子が有する全エネルギー、$h\nu = E_0 - E$ は放射される光子エネルギーである。(3-3)式で与えられるパラメーターξ は、Thomas-Fermiモデルの原子半径と関係していて、$\xi \approx 0$ のときは完全に遮蔽され、$\xi \gg 1$ のときは遮蔽効果はない。

エネルギーが数MeVより大きくなる相対論的領域における制動放射断面積は、

$$d\sigma = 4Z^2 r_e^2 \alpha \frac{d\nu}{\nu} \left\{ \left(1+\varepsilon^2\right) \left[\frac{\phi_1(\xi)}{4} - \frac{1}{3}\ln Z - f(Z) \right] - \frac{2}{3}\varepsilon \left[\left[\frac{\phi_2(\xi)}{4} - \frac{1}{3}\ln Z - f(Z) \right] \right] \right\} \tag{3-4}$$

で与えられる。ここで、$\varepsilon = E/E_0$ 、$\alpha = 1/137$ 、$f(Z)$ はクーロン補正、$\phi_1(\xi)$ と$\phi_2(\xi)$ はそれぞれξ に依存する遮蔽関数である。この式はBornによる近似計算の結果から導出されていて、低エネルギー領域には適用できない。$Z \geq 5$ の元素について遮蔽関数$\phi_1(\xi)$ と$\phi_2(\xi)$ がThomas-Fermiモデルの原子を用いて数値計算され、その結果を0.5%程度の精度で再現する次のような経験式が得られている。

$$\phi_1(\xi) = 20.863 - 2\ln\left[1 + (0.55846\xi)^2\right] - 4\left[1 - 0.6\exp(-0.9\xi) - 0.4\exp(-1.5\xi)\right]$$

$$\phi_2(\xi) = \phi_1(\xi) - \frac{2}{3}\left(1 + 6.5\xi + 6\xi^2\right)^{-1} \tag{3-5}$$

ここで、

$$\xi \to 0 \qquad \phi_1(0) = \phi_2(0) + \frac{2}{3} = 4\ln 183$$

$$\xi \to \infty \qquad \phi_1(\infty) = \phi_2(\infty) \to 19.19 - 4\ln\xi$$

クーロン補正$f(Z)$ は、原子が作る電界中において放出する電子のクーロン相互作用を考慮してBorn近似に加えた補正である。この補正は大きくなく、$\alpha = Z/137$ として

$$f(Z) = \alpha^2 \left[\left(1+\alpha^2\right)^{-1} + 0.20206 - 0.0369\alpha^2 + 0.0083\alpha^4 - 0.002\alpha^6 \right] \tag{3-6}$$

の近似式で与えられる。

遮蔽効果が全くない場合、すなわち$\xi \gg 1$のときの制動放射断面積は

$$d\sigma = 4Z^2 r_e^2 \alpha \frac{d\nu}{\nu} \left(1 + \varepsilon^2 - \frac{2\varepsilon}{3}\right) \left[\ln\frac{2E_0 E}{m_e c^2 h\nu} - \frac{1}{2} - f(Z) \right] \tag{3-7}$$

一方、完全に遮蔽される場合、すなわち$\xi = 0$のときは

$$d\sigma = 4Z^2 r_e^2 \alpha \frac{d\nu}{\nu} \left\{ \left(1 + \varepsilon^2 - \frac{2\varepsilon}{3}\right) \left[\ln\left(183 Z^{-1/3}\right) - f(Z) \right] + \frac{\varepsilon}{9} \right\} \tag{3-8}$$

と簡単な解析式で与えれれる。

制動放射によるエネルギー損失は、制動放射断面積に放出光子のエネルギーを掛け、放出光子が取りうるエネルギー領域に渡り積分することで求められ、

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = N \int_0^{\nu_0} h\nu \frac{d\sigma}{d\nu}(E_0, \nu)\, d\nu \tag{3-9}$$

となる。ここで、$N = \rho N_a / A$ は単位体積(cm^3)当たりの原子数、$\nu = E_0/h$である。(3-9)式を

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = N E_0 \Phi_{rad} \tag{3-10}$$

$$\Phi_{rad} = \frac{1}{E_0} \int_0^{\nu_0} h\nu \frac{d\sigma}{d\nu}(E_0, \nu)\, d\nu$$

と書き換える。$d\sigma/d\nu$ は近似的に $1/\nu$ に比例するので、このように書き換えることで、Φ_{rad} は ν には依存せずに物質に依存する。

$\xi \gg 1$ の遮蔽効果が全くない場合に、$m_e c^2 \ll E_0 \ll 137 m_e c^2 Z^{-1/3}$ のエネルギー領域における Φ_{rad} は以下のように求められる。

$$\Phi_{rad} = 4Z^2 r_e^2 \alpha \left(\ln \frac{2E_0}{m_e c^2} - \frac{1}{3} - f(Z) \right) \tag{3-11}$$

一方、$\xi = 0$ の完全に遮蔽される場合に、$E_0 \gg 137 m_e c^2 Z^{-1/3}$ のエネルギー領域における Φ_{rad} は以下のように求められる。

$$\Phi_{rad} = 4Z^2 r_e^2 \alpha \left(\ln \left(183 Z^{-1/3} \right) + \frac{1}{18} - f(Z) \right) \tag{3-12}$$

ξ の中間の値については(3-9)式を数値的に積分する。

銅に入射した電子について(3-2)式で計算された衝突によるエネルギー損失と(3-9)式で計算された制動放射のエネルギー損失の比較を図３－１に示す。衝突によるエネルギー損失は入射エネルギーにはあまり依存せず Z に比例するが、制動放射によるエネルギー損失は入射エネルギーに比例し、Z^2 に比例する。このことは制動放射によるエネルギー損失が入射エネルギーとともに急激に増加することを説明している。また、制動放射では１個か２個の光子の放出でエネルギーが消費される。したがって、単色の電子または陽電子ビームを入射しても制動放射の統計的揺らぎは大きい。

3.3　電子–電子制動放射

原子核が作る電界による制動放射ばかりではなく、原子に含まれる電子が作る電界による制動放射もあり得る。この場合の制動放射断面積については様々な研究がなされ、原子核が作る電界の場合は(3-4)式の Z^2 が Z となることがわかった。したがって、電子–電子制動放射を含む場合は(3-4)式の Z^2 を $Z(Z+1)$ で置き換えれば良いことが示されている。

3.4　臨界エネルギー

制動放射によるエネルギー損失は電子あるいは陽電子のエネルギーを吸収する物質に大きく依存する。衝突によるエネルギー損失と制動放射によるエネルギー損失が等しくなる

$$\left(\frac{dE}{dx} \right)_{rad} = \left(\frac{dE}{dx} \right)_{coll} \tag{3-13}$$

のときのエネルギーを臨界エネルギー E_c と呼ぶ。このエネルギーは物質固有のエネルギーである。エネルギーが E_c より大きい領域は制動放射によるエネルギー損失が支配的で、E_c より小さいエネルギーでは衝突によるエネルギー損失が支配的である。表３－１に様々な物質の臨界エネルギーを示す。E_c の近似式は

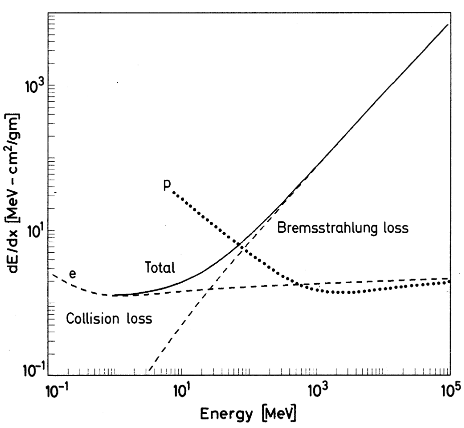

図３-１　銅に入射した電子の衝突によるエネルギー損失と制動放射によるエネルギー損失の計算結果

$$E_c = \frac{800}{Z+1.2} \quad \mathrm{MeV} \tag{3-14}$$

で与えられる。

3.5　放射長

放射長とは制動放射のみのエネルギー損失により電子のエネルギーが$1/e$に減衰する距離として定義される。(3-10)式を変形して微分方程式

$$-\frac{dE}{E} = N\Phi_{rad}dx \tag{3-15}$$

を得る。高エネルギー領域を考えると、制動放射のエネルギー損失と比較して衝突によるエネルギー損失は無視でき、(3-12)式に示されるようにΦ_{rad}はエネルギーに依存しないので、

$$E = E_0 \exp\left(-\frac{x}{L_{rad}}\right) \tag{3-16}$$

となる。ここで、xは電子が物質中を通過した距離で、$L_{rad} = 1/N\Phi_{rad}$は放射長である。(3-12)式を使うと放射長L_{rad}は

$$\frac{1}{L_{rad}} \approx \left[4Z\left(Z+1\right)\frac{\rho N_a}{A}\right] r_e^2 \alpha \left[\ln\left(183 Z^{-1/3}\right) - f\left(Z\right)\right] \tag{3-17}$$

となる。この式では電子–電子制動放射の寄与が含まれ、定数1/18は無視している。いくつかの物質の放射長L_{rad}を表３－２に示す。放射長L_{rad}の大体の値を求めるときは以下の近似式を使うと便利である。

$$L_{rad} = \frac{716.4A}{Z\left(Z+1\right)\ln\left(287/\sqrt{Z}\right)} \quad \mathrm{g/cm^2} \tag{3-18}$$

ここで、ZとAはそれぞれ物質の原子番号と質量数である。この式を用いると2.5%程度の精度でL_{rad}を求めることができるが、Heについては5%と精度が悪くなる。

物質中の長さを放射長L_{rad}を単位とすると、(3-10)式は

$$-\frac{dE}{dt} \approx E_0 \tag{3-19}$$

と簡単になる。ここでtは放射長L_{rad}を単位とした距離である。ここでも、制動放射によるエネルギー損失は放射長を単位とすると、概ね物質に依存しなくなることがわかる。

化合物や混合物の放射長はBraggの法則を使うと

表３-１　いくつかの物質の臨界エネルギー

Material	Critical energy [MeV]
Pb	9.51
Al	51.0
Fe	27.4
Cu	24.8
Air (STP)	102
Lucite	100
Polystyrene	109
NaI	17.4
Anthracene	105
H_2O	92

表３－２　いくつかの物質の放射長

Material	[gm/cm^2]	[cm]
Air	36.20	30050
H_2O	36.08	36.1
NaI	9.49	2.59
Polystyrene	43.80	42.9
Pb	6.37	0.56
Cu	12.86	1.43
Al	24.01	8.9
Fe	13.84	1.76
BGO	7.98	1.12
BaF_2	9.91	2.05
Scint.	43.8	42.4

$$\frac{1}{L_{rad}} = w_1 \left(\frac{1}{L_{rad}}\right)_1 + w_2 \left(\frac{1}{L_{rad}}\right)_2 + \cdots\cdots \tag{3-20}$$

となる。ここで、w_1、w_2 は(1-28)式で与えられる化合物あるいは混合物中の元素1、2の質量比である。

3.6　電子の飛程

物質中を通過する電子は原子核による多重クーロン散乱を起こしやすいので、電子の飛程はdE/dxの積分から得られる経路長とは大きく異なる。電子の飛程とdE/dxの積分から得られる経路長との差は物質やエネルギーに大きく依存し、20%から400%の範囲になる。それに加え、電子の場合は１回の衝突で付与されるエネルギーの割合が大きく、制動放射によるエネルギー損失も加わるので、重い荷電粒子の場合と比較してエネルギー損失の統計的揺らぎが大きい。衝突および制動放射それぞれの場合において、数回の衝突や光子放射で電子の有するエネルギーの大部分が付与されることがある。図３－２にアルミニウムに入射した単色電子ビームの飛程の測定例を示す。図に示されるように飛程ストラグリングは大きいことがわかる。異なる物質について、一様減速過程の条件で計算した電子の飛程とエネルギーの関係を図３－３に示す。

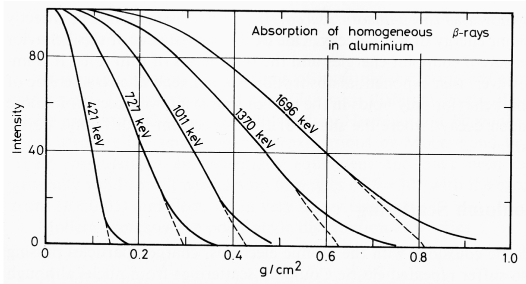

図３-２　アルミニウムに入射した単色電子ビームの飛程

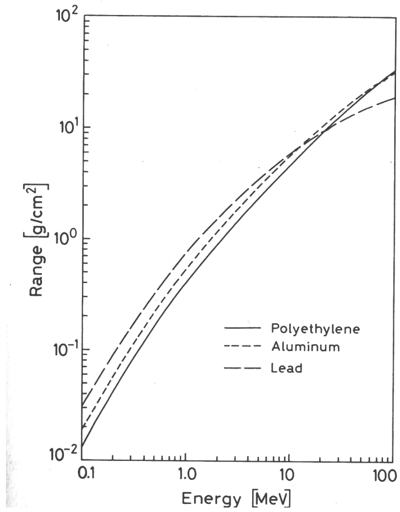

図３-３　一様減速過程の条件で計算した電子のエネルギーと飛程の関係

3.7　β線の吸収

β線は連続エネルギースペクトルを有するので、物質によるβ線の吸収曲線は指数関数で良い近似となる。いくつかの物質にβ線を照射したときの物質厚さに対する透過曲線を図３－４に示す。図に示されるように片対数スケールで直線を描いているので、

$$I = I_0 \exp(-\mu x), \tag{3-21}$$

という関数で良く近似できることがわかる。この式のμはβ線の吸収係数と呼ばれ、β線の最大エネルギーと関係している。この指数関数による近似はβ線の物理特性とは関係がなく、たまたま良い近似であることに注意する必要がある。

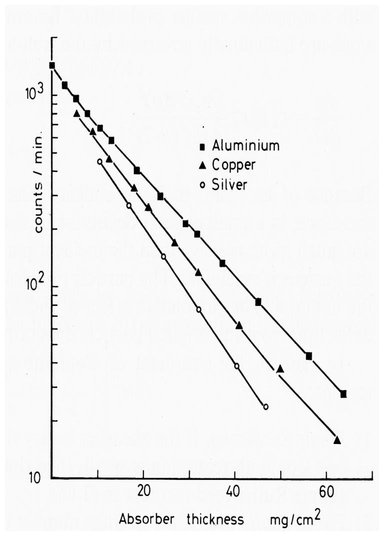

図３-４　β線を照射したときの物質厚さに対する透過曲線