

## 2. チェレンコフ放射

媒質中の光の速度は

$$\beta c = v = c/n, \quad (2-1)$$

で与えられる。ここで、 $n$  は媒質の屈折率である。媒質中の光の速度は、真空中の光の速度より小さい。無限に広い物質に荷電粒子が入射したとき、物質中を通過する荷電粒子の速度が、物質を構成する媒質中の光速より速い場合がある。このときの荷電粒子の速度は

$$v_{particle} > c/n, \quad (2-2)$$

という条件を満たしている。このよう場合、飛行機が音速を超えるときに発生する衝撃波のような電磁的な衝撃波を放射する。この電磁的な衝撃波をチェレンコフ放射と呼ぶ。図2-1にチェレンコフ放射が発生する様子を概念的に示す。位相の揃った波面は円錐を形成し、荷電粒子の軌道に対する波面の放出角度は以下の式で与えられる。

$$\cos \theta_c = \frac{1}{\beta n(\omega)} \quad (2-3)$$

(2-3)式に示されるように、チェレンコフ放射の放出角度は荷電粒子の速度と放出されるチェレンコフ光の周波数に依存する。

今、屈折率 $n$ の物質に入射した荷電粒子がチェレンコフ放射が発生するための速度の閾値を $v_{th} = c/n$ とする。このときの入射荷電粒子のエネルギー $E_{th}$ は、

$$E_{th} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v_{th}/c)^2}} = \gamma_{th} m_0 c^2 \quad (2-4)$$

となる。ここで $m_0$ は荷電粒子の静止質量であり、 $\gamma_{th}$ は以下の式で与えられる。

$$\gamma_{th} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_{th}/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{th}^2}} \quad (2-5)$$

$\beta_{th} = v_{th}/c$ をチェレンコフ放射の条件と呼ぶ。屈折率 $n$ を用いると(2-5)式は

$$\gamma_{th} = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (2-6)$$

となる。

通常の場合、荷電粒子は有限の厚さを有する媒質に入射する。厚さが $L$ の板状の媒質を、電荷 $z$ の荷電粒子が直線状に通過するときに単位周波数および単位立体角あたりに放射するエネルギーは

$$\frac{d^2 E}{d\omega d\Omega} = z^2 \frac{\alpha \hbar}{c} n \beta^2 \sin^2 \theta \left| \frac{\omega L \sin \xi(\theta)}{2\pi \beta c \xi(\theta)} \right|^2 \quad (2-7)$$

で与えられる。ここで、 $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0 \hbar c = 1/137$ は微細構造定数、 $n$ は媒質中の屈折率および

$$\xi(\theta) = \frac{\omega L}{2\beta c} (1 - \beta n \cos \theta) \quad (2-8)$$

である。 $|\sin \xi(\theta)/\xi(\theta)|^2$ で表わされる項はフラウンホーファーの回折パターンを示す。従って、チェレンコフ放射は $\cos \theta = 1/\beta n$ の鋭いピークを中心とする回折パターンとして放出される。媒質中

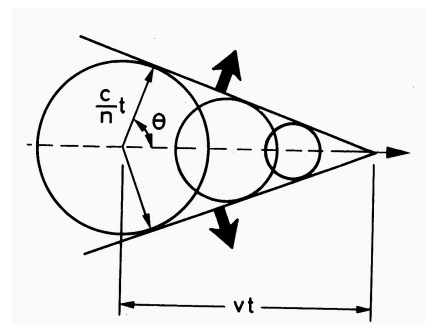


図2-1 チェレンコフ放射の概念

で角度 $\theta$ 方向に放出されるチェレンコフ放射は媒質の外部では、屈折の効果により $\sin \phi = n \sin \theta$ の条件で定まる角度 $\phi$ 方向に観測される。

放出されるチェレンコフ光の波長と比較して媒質の厚さ $L$ が長い場合は、 $\sin \xi / \xi$ の項はデルタ関数 $\delta(1 - \beta n \cos \theta)$ に漸近する。このとき(2-3)式で与えられるチェレンコフ角 $\theta_c$ の方向に放出される必要がある。また、チェレンコフ角 $\theta_c$ が物理的に意味を持つためには、閾条件(2-2)式より $\beta > 1/n$ を満たさねばならない。媒質の厚さ $L$ の値が減少すると、鋭いピークを中心とするチェレンコフ光の周波数帯域が広がり始まるので、チェレンコフ角 $\theta_c$ を中心として対称な角度に広がる。さらに屈折率 $n$ は角周波数 $\omega$ の関数なので、チェレンコフ光の周波数が異なれば放射角も異なる。この効果もチェレンコフ光の放射角の広がりに寄与する。

(2-7)式の $\sin \xi / \xi$ の項がデルタ関数 $\delta(1 - \beta n \cos \theta)$ に漸近することに注意して、(2-4)式を立体角に渡って積分すると、

$$-\frac{dE}{d\omega} = z^2 \frac{\alpha \hbar}{c} \omega L \sin^2 \theta_c \quad (2-9)$$

媒質の厚さ $L$ がチェレンコフ光の波長より長いと仮定して $L$ で割り、 $\beta > 1/n(\omega)$ の条件を満たす周波数領域で積分すると、荷電粒子の媒質中における単位通過距離当たりに放出されるエネルギーを与える以下の式を得る。

$$-\frac{dE}{dx} = z^2 \frac{\alpha \hbar}{c} \int \omega d\omega \sin^2 \theta_c = z^2 \frac{\alpha \hbar}{c} \int \omega d\omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)}\right) \quad (2-10)$$

この式からわかるように、 $\beta$ の増加とともにエネルギー損失も増加するが、相対論的エネルギー領域ではチェレンコフ放射によるエネルギー損失は衝突によるエネルギー損失より小さい。固体中ではチェレンコフ放射によるエネルギー損失は $10^{-3} \text{MeVcm}^2/\text{g}$ 程度のオーダーであり、衝突によるエネルギー損失と比較すると無視できる大きさである。 $\text{H}_2$ や $\text{He}$ のようなガスにおけるチェレンコフ放射によるエネルギー損失は $0.01 \sim 0.2 \text{MeVcm}^2/\text{g}$ 程度と固体中より大きくなるが、衝突によるエネルギー損失と比較すると小さい。チェレンコフ放射によるエネルギー損失は、 $dE/dx$ を高い精度で計算する場合に必要となるが、(1-15)式のBethe-Bochの式では既に考慮されている。

チェレンコフ放射の閾条件とチェレンコフ光の放射角の荷電粒子速度依存性は、高エネルギー物理学実験において粒子速度を非常に高い精度で測定するために使用されるチェレンコフ検出器において重要な性質である。チェレンコフ検出器の設計において、荷電粒子が放射媒質中を通過する際に放射する光子数は重要なパラメーターである。放射媒質の単位距離当たりに放出されるチェレンコフ光の単位周波数当たりの光子数は(2-6)式を $\hbar\omega$ と $L$ で割ると

$$\frac{d^2 N}{d\omega dx} = \frac{z^2 \alpha}{c} \sin^2 \theta_c = \frac{z^2 \alpha}{c} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)}\right) \quad (2-11)$$

となる。波長当たりの関係に変換すると、

$$\frac{d^2 N}{d\lambda dx} = \frac{2\pi z^2 \alpha}{\lambda^2} \sin^2 \theta_c = \frac{z^2 \alpha}{c} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\lambda)}\right) \quad (2-12)$$

通常のチェレンコフ検出器では、チェレンコフ光は光電子増倍管で電流パルスに変換される。典型的な光電子増倍管は $350 \text{nm} \sim 550 \text{nm}$ の可視光領域に感度を持つので、(2-9)式をこの波長領域に渡り積分すると次の式になる。

$$\frac{dN}{dx} = 2\pi z^2 \alpha \sin^2 \theta_c \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{\lambda^2} = 476 z^2 \sin^2 \theta_c \quad [\text{photons/cm}] \quad (2-13)$$