0.　粒子線の相互作用に関する基本的な概念

0.1　断面積

「断面積」は粒子間の相互作用や衝突などの相互作用が発生する確率の尺度を表す。相互作用の形がわかれば「断面積」の値を計算することができる。

粒子ビームが標的に入射するときの散乱断面積の概念は図0-1を参照。

ビームの領域は標的より十分に広く、ビーム中の粒子は空間的・時間的に均一に分布。フラックスFは単位面積、単位時間当たりに入射する粒子数を表す。

入射ビーム中の粒子の衝突パラメータが時間的にランダムに変動するので、単位時間当たりに微小な立体角$d\Omega$に散乱される粒子数$dN_s/d\Omega$は一定値ではないが、測定回数を多くすれば平均値（単位時間、単位立体角当たり）に近付く。このとき、「微分断面積」は以下の式で定義される。

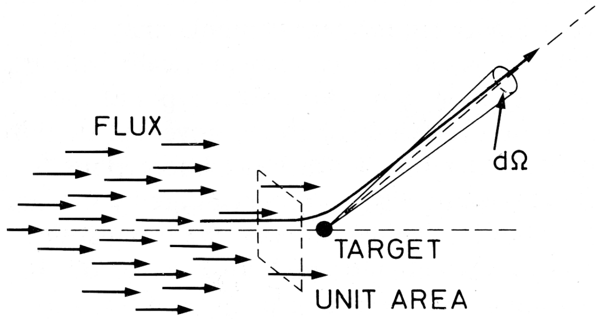

図０−１　散乱断面積の概念

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(E,\Omega)=\frac{1}{F}\frac{dN_s}{d\Omega}\,. \tag{0-1}$$

ここで、図0-1より、$d\sigma/d\Omega$は単位時間当たり、単位フラックス当たりに微小立体角$d\Omega$に散乱される粒子の平均の割り合い（確率）を表す。ただし、量子力学の散乱問題（波動関数の振幅が確率を表す）では、標的に入射する全確率の内、微小立体角$d\Omega$に散乱される確率密度の流れを表す。Fと$dN_s/d\Omega$の次元を考慮すると、$d\sigma$は面積の次元となり、標的が入射ビームを遮る幾何学的断面積と解釈される。

微分断面積$d\sigma/d\Omega$の値は、反応のエネルギーEと粒子が散乱される角度に依存する。

反応エネルギーEのときの全散乱の確率は全断面積σと呼び、$d\sigma/d\Omega$を立体角で積分する。

$$\sigma=\int\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega\,. \tag{0-2}$$

実際の厚みのある板状の標的の場合、散乱中心が密度Nで均一に分布し、標的が十分に薄くビームの入射方向にそった標的の物質厚さをδxとすると、ビームの入射方向に垂直な単位面積あたりにビームが遭遇する散乱中心の数は$N\delta x$となる。ビームが標的のビーム軸方向の断面積Aより十分大きな断面積を持つとき、散乱に遭遇する入射粒子の数はFAとなる。このとき、単位時間当たりに立体角$d\Omega$に散乱される平均粒子数は

$$N_s(\Omega)=FAN\delta x\frac{d\sigma}{d\Omega}\,. \tag{0-3}$$

全立体角へ散乱される粒子の総数は

$$N_{tot}=FAN\delta x\sigma\,. \tag{0-4}$$

ここで、ビーム断面積がAより小さい場合は、Aを入射ビーム断面積と考える。このとき、$FA \to n_{inc}$となり、これは単位時間当たりの入射粒子数を表す。したがって、(0-4)式の両辺をFAで割ると、1個の粒子が厚さδxで散乱される確率は以下のようになる。

$$\text{Prob. of interection in } \delta x = N\sigma\delta x\,. \tag{0-5}$$

0.2　平均自由行程

粒子が任意の厚さxのところで散乱される（相互作用する）確率を求める。
まず、粒子が距離xを通過する間に散乱されない（相互作用しない）確率を求める。

$P(x)$：距離x進むあいだに相互作用しない確率。

wdx：xと$x+dx$のあいだに相互作用する確率。

とすると、xと$x+dx$のあいだに相互作用しない確率は

$$P(x+dx) = P(x)(1-wdx)\,,$$

$$P(x) + \frac{dP(x)}{dx}dx = P(x) - P(x)wdx\,,$$

$$dP(x) = -wP(x)dx\,,$$

$$P(x) = C\exp(-wx)\,. \tag{0-6}$$

ここで、Cは定数であるが、$P(0)=1$という条件から$C=1$となる。したがって、距離xの区間のどこかで散乱する（相互作用する）確率は

$$P_{\text{int}}(x) = 1-\exp(-wx)\,. \tag{0-7}$$

距離xを相互作用せずに進んだ粒子がxと$x+dx$の区間に相互作用する確率

$$\begin{aligned} F\left(x\right)dx &= P\left(x\right)\cdot P_{\text{int}}\left(dx\right) \\ &= \exp\left(-wx\right)\left\{1-\exp\left(-wdx\right)\right\} \\ &= \exp\left(-wx\right)\left\{1-\left(1-wdx+\frac{1}{2!}\left(wdx\right)^2-O\left(dx^3\right)\right)\right\} \\ &= \exp\left(-wx\right)wdx \end{aligned} \tag{0-8}$$

物質に入射した粒子が相互作用（散乱）せずに進む平均距離、「平均自由行程」は

$$\lambda = \frac{\int_0^\infty xP(x)\,dx}{\int_0^\infty P(x)\,dx} = \frac{\int_0^\infty x\exp(-wx)\,dx}{\int_0^\infty \exp(-wx)\,dx} = \frac{1/w^2}{1/w} = \frac{1}{w}\,. \tag{0-9}$$

粒子が厚さδxの薄い標的を通過する場合に散乱する確率は、(0-7)式を使うと

$$P_{\text{int}}(\delta x) = 1-\exp(-w\delta x) = 1-\exp\left(-\frac{\delta x}{\lambda}\right) = 1-\left[1-\frac{\delta x}{\lambda}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\delta x}{\lambda}\right)^2+\cdots\right] \approx \frac{\delta x}{\lambda}\,. \tag{0-10}$$

平均自由行程λと物質中の散乱中心の密度及び断面積との関係は(0-5)式と比較すると、

$$\lambda = \frac{1}{N\sigma}. \tag{0-11}$$

従って、以下の重要な関係式を得る。

$$P(x) = \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) = \exp(-N\sigma x) \tag{0-12}$$

$$P_{\mathrm{int}}(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) = 1 - \exp(-N\sigma x) \tag{0-13}$$

$$F(x)dx = \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)\frac{dx}{\lambda} = \exp(-N\sigma x)N\sigma dx \tag{0-14}$$

0.3　面積密度（物質厚さ）

面積密度(surface density)または物質厚さ(mass thickness)は、粒子の散乱現象を取り扱うときによく使用される標的の厚さを表す単位で、

$$\text{mass thickness} \equiv \rho \cdot t. \tag{0-15}$$

ここで、ρは物質の密度[g/cm^3]、tは厚さ[cm]なので、物質厚さの次元は[g/cm^2]となり、単位面積当たりの質量になる。ここで、ビームが通過する断面積をS [cm^2]とし、ビームが通過した領域の体積$V = St$の物質の質量をM [g]とする。この物質の質量数をA、アボガドロ数をN_Aとすると、ビームが通過した領域に含まれる物質の原子数は$n = (M/A)\cdot N_A = (\rho tS/A)\cdot N_A$となり、$\rho t = nA/(SN_A)$となる。物質を構成する原子の中性子数$N$と陽子数$Z$とすると$A = N + Z$である。つまり、$\rho t$はビームが通過した領域の単位面積あたりの核子数に比例する。通常の物質では、粗い近似として$N \sim Z$としてよく、$\rho t = 2Zn/(SN_A)$とすることができる。このとき、ρtはビームが通過した領域の単位面積あたりの電子数に比例するパラメータと考えることができる。このように、単なる「物理的厚さ」tに対して、「物質厚さ」ρtは粒子ビームと物質との相互作用を取り扱うときに重要となる散乱中心（原子核や電子）の単位面積あたりの数を表している。